פונקצית הייצור עם הון

עתה נניח שבכל תקופה t התוצר של מוצר יחיד במשק מיוצר באמצעות שני גורמי ייצור: הון, K_t, ועבודה L_t.

פונקצית הייצור תסומן ב – F(·,·).

1

הנחות

א. שני גורמי הייצור חיוניים: F(K,0) = F(0, L) = 0

ב. התפוקה השולית של שני גורמי הייצור חיובית:

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}>0,\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}>0$$

ג. התפוקה השולית של שני גורמי הייצור פוחתת:

$$\frac{\partial F^2(K,L)}{\partial K^2}<0,\frac{\partial F^2(K,L)}{\partial L^2}<0$$

2

הנחות - המשך

ג. הומוגניות מדרגה ראשונה: הכפלת <u>שני</u> גורמי הייצור בגורם נתון מכפילה את התפוקה באותו גורם (בלשון "כלכלית" מתקיימת "תשואה קבועה לגודל", תק"ל):

$$F(\lambda K,\lambda L)=\lambda F(K,L)$$

להנחה זאת מספר השלכות חשובות:

1. נציב במקום λ, 1/L:

$$F(\frac{1}{L}K,\frac{1}{L}L)=F(\frac{K}{L},1)=\frac{1}{L}F(K,L)$$

3

הנחות - המשך

נגדיר y = Y/L, k = K/L ונקבל:

$$y=F(k,1)\equiv f(k)$$

במלים:

התוצר לעובד הוא פונקציה של ההון לעובד בלבד!!!

2. "משפט אוילר":

$$F(K,L)=\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}K+\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}L$$

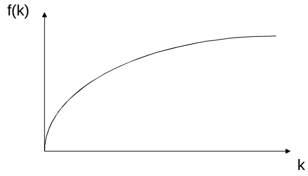
תרגיל: הוכח....

4

הנחות - המשך

ד. "תנאי אינאדה"

$$\lim_{k\to 0} f'(k) = \infty, \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$$



5

מודל Ramsey

עתה המודל מאפשר העברת משאבים על פני זמן. בהתאם, עלינו לעסוק בהשקעה במשק.

משקי הבית מחליטים הן על כמות העבודה אותה הם מספקים והן על החיסכון. מעתה החלטות החיסכון הן המשמעותיות!

6

השקעה

ההשקעה הנקייה היא השינוי במלאים פיזיים.

במודל שלנו מייצרים מוצר יחיד.

אנחנו נניח שכל יחידת מוצר יכולה להפוך ליחידת מוצר תצרוכת *או* ליחידת השקעה.

ההשקעה בתקופה t, I_t, מתווספת לכמות ההון הקיימת לאחר הפחתת הפחת, וקובעת את כמות ההון במשק בתקופה העוקבת, K_{t+1}. בהתאם I_t היא ההשקעה *הגולמית*.

7

השקעה וייצור

בהתאם, אנו יכולים לכתוב:

$$K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t$$

משוואת המקורות והשימושים היא:

$$Y_t = C_t + I_t$$

התוצר מיוצר ע"י הון ועבודה, בעזרת פונקצית יצור המקיימת תק"ל: $Y_t = F(K_t,L_t)$

8

היצרן המייצג

אנו מניחים שבמשק יצרנים רבים (האם מספרם חשוב?) המפעילים את פונקצית הייצור הנ"ל.

בהינתן מסלול הריבית, מטרתו של כל יצרן היא להביא למקסימום את הערך הנוכחי של זרמי הדיוידנדים שלו :

$$W=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{D_t}{\prod_{i=1}^{t}(1+r_{i+1})}$$

מתוך הבנה שאבר הראשון הוא 1. נשים לב ששער הריבית יכול להשתנות על פני זמן.

9

הדיוידנדים

היצרן צריך לקבוע בתקופה הנוכחית את כמות ההון איתה יפעל בתקופה הבאה.

הדיוידנד בכל תקופה, D_t, נתון ע"י ההפרש בין התוצר, $F(K_t,L_t)$, תשלומי השכר וההשקעה הגלמית I_t :

$$D_t = F(K_t,L_t) - w_tL_t - I_t$$

כזכור, ההשקעה הגלמית מקיימת :

$$I_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t$$

10

מדיניות ההעסקה

בהינתן השכר, היצרן שוכר בכל תקופה עובדים. כלל האופטימיזציה הוא, כפי שראינו :

$$\frac{\partial F(K_t,L_t)}{\partial L} = w_t$$

במקרה של תקי"ל, ראינו ש :

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = f(k) - kf'(k)$$

11

מדיניות ההשקעה

בהינתן מסלול הריבית, היצרן בוחר את זרמי השקעה שיביאו למקסימום את הערך הנוכחי של הדיוידנדים. למעשה, בהינתן K_t, היצרן בוחר בכל תקופה את K_{t+1}.

קל להיווכח שהיצרן בוחר K_{t+1} המקיים :

$$-1+\frac{\frac{\partial F(K_{t+1},L_{t+1})}{\partial K}+(1-\delta)}{1+r_{t+1}}=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial F(K_{t+1},L_{t+1})}{\partial K}+(1-\delta)=1+r_{t+1}$$

12

תקי"ל

נזכור שהנחת התקי"ל גוררת:

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = f'(k)$$

מכאן מתקבל:

$$f'(k_{t+1}) - \delta = r_{t+1}$$

13

שוק ההון

בשוק ההון קיימים שני שווקים:

א. שוק הלוואות פרטי בו הפרטים נותנים/לוקחים הלוואות חד תקופתיות הנושאות רבית של $1+r_{t+1}$ בין התקופה t לתקופה t+1.

ב. שוק מניות. כל מניה המוחזקת בתקופה t מזכה את בעליה בדיבידנד של d_t יחידות תצרוכת. לאחר חלוקת דיבידנדים נפתח סחר במניות. מחיר המניה הוא p_t יחידות מוצר תצרוכת.

14

משק הבית

משק הבית המייצג בא לעולם עם מתת של יחידת זמן אחת בכל תקופה. נניח, למען הפשטות, שאין לו כל הנאה מפנאי. (כתרגיל: כיצד דברים משתנים אם פנאי נכנס להעדפות?)

משק הבית קונה/מוכר בכל תקופה t, s_{t+1} מניות. כמו כן הוא לווה/מלווה b_{t+1} יחידות מוצר. אין מגבלה על מכירות בחסר.

מגבלת התקציב:

$$c_t + b_{t+1} + p_t s_{t+1} = w_t + (p_t + d_t)s_t + (1+r_t)b_t$$

15

בעיית משק הבית

כמו תמיד, משק הבית מביא למקסימום את הערך הנוכחי של התועלת מזרמי התצרוכת, ומשתמש לשם החישוב בשיעור נכיון $1/(1+\rho)$. משתני הבחירה הם b_{t+1} ו s_{t+1}.

בהתאם נקבל את התנאים הבאים:

$$\frac{\partial}{\partial b_{t+1}}: -u'(c_t) + (1+r_{t+1})\frac{u'(c_{t+1})}{1+\rho} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial s_{t+1}}: -p_t u'(c_t) + (p_{t+1} + d_{t+1})\frac{u'(c_{t+1})}{1+\rho} = 0$$

16

שיווי משקל

בשיווי משקל מתקיים:

א. $b_t = 0$ לכל t.

ב. $s_t = 1$ לכל t (זה נירמול מספר המניות לעובד במשק)

נציב תנאים אלה במגבלת התקציב ונקבל:

$$c_t = w_t + d_t$$

17

שיווי משקל - המשך

מתוך הגדרת הדיבידנד (לעובד) נקבל:

$$c_t = w_t + [f(k_t) - w_t - i_t] \Leftrightarrow$$
$$c_t + i_t = f(k_t) = y_t$$

כלומר, משוואת המקורות והשימושים מתקיימת.

18

הדינמיקה

המודל מיצר מערכת סבוכה מאד. למשל, מבעיית הפרט ובעיית היצרן אנו יודעים:

$$u'(f(k_t) - (k_{t+1} - (1-\delta)k_t)) =$$
$$(f'(k_{t+1}) + (1-\delta)) \frac{u'(f(k_{t+1}) - (k_{t+2} - (1-\delta)k_{t+1}))}{1+\rho}$$

זאת משוואת הפרשים לא-ליניארית מסדר שני, עם תנאי התחלה יחיד (k_t). הפתרון דורש תחכום!

19

הדינמיקה -המשך

מתוך תנאי סדר ראשון של משק הבית, אנו גוזרים את תנאי היעדר אפשרויות הארביטראז':

$$\frac{p_{t+1} + d_{t+1}}{p_t} = 1 + r_{t+1}$$

אנחנו יודעים גם ש:

$$d_{t+1} = [f'(k_{t+1}) + (1-\delta)]k_{t+1} - k_{t+2}$$
$$1 + r_{t+1} = f'(k_{t+1}) + (1-\delta)$$

מתקבלת מערכת דינמית הכוללת את p_t, p_{t+1}, k_{t+1}, k_{t+2} עם תנאי התחלה יחיד, k_t. בעיה סבוכה!

20

מצב מנוחה

כאשר המערכת במנוחה, אנחנו יכולים להגיד קצת יותר.

א. מתנאי סדר ראשון של הפרט מתקבל:

$$r = \rho$$

ב. מתנאי סדר ראשון של היצרן מתקבל בהמשך:

$$r = f'(k) - \delta = \rho$$

21

מצב מנוחה - המשך

ג. מתנאי היעדר ארביטראז' מתקבל:

$$\frac{d}{p} = r \Leftrightarrow$$

$$p = \frac{d}{r}$$

כצפוי, מחיר המניה שווה לערך הנוכחי של זרם ההכנסות הנובע ממנה החל בתקופה הבאה, לנצח (הוכח!).

22

מצב מנוחה - המשך

ד. אנו יודעים את ערך הדיוידנד במצב מנוחה:

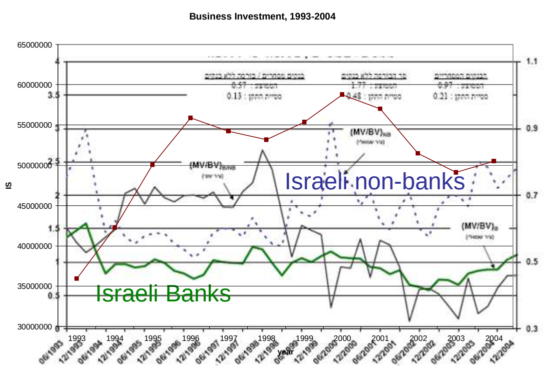
$$d = kf'(k) - \delta k = [f'(k) - \delta]k = rk$$

מכאן שמחיר המניה מקיים: $p = k$.

הערך של יצרן שההון שלו הוא k הוא פשוט k.

Tobin's q, כלומר המנה בין ערך השוק של היצרן לבין ערך ההון שלו הרשום בספרים, שווה 1.

23



מקור: רוטנברג ופרל, 2005.

24

מצב מנוחה - סוף

לבסוף אנו יכולים לחשב את ההשקעה והתצרוכת לנפש בשיווי משקל:

$$i = \delta k$$

$$c(k) = f(k) - \delta k$$

נשים לב שהתצרוכת מגיעה למקסימום בנקודה המקיימת:
$f'(k^*) = \delta$ בעוד שאנו יודעים שהמערכת מקיימת
$f'(k^{**}) = \rho+\delta$

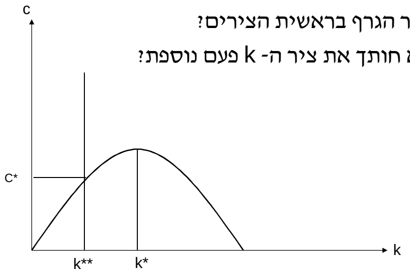
25

בציור

שאלות:

למה עובר הגרף בראשית הצירים?

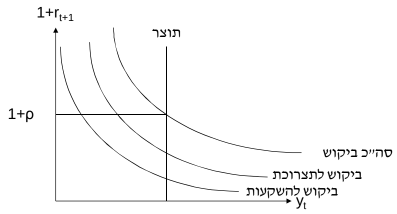
למה הוא חותך את ציר ה- k פעם נוספת?



26

ניתוח גראפי

נשים לב שבהנחות שלנו התוצר בכל תקופה t הוא נתון. עובדה זאת אינה נכונה אם הפרטים מחליטים על היצע העבודה!



27

ממשלה

נניח עתה שבמשק זה פועלת ממשלה הצורכת בכל תקופה G יחידות תצרוכת (לנפש). נניח גם שהממשלה מממנת תצרוכת זאת ע"י מס גולגולת.

כמו תמיד, **במצב מנוחה** מדיניות זאת אינה משפיעה על שער הריבית!

לכן:

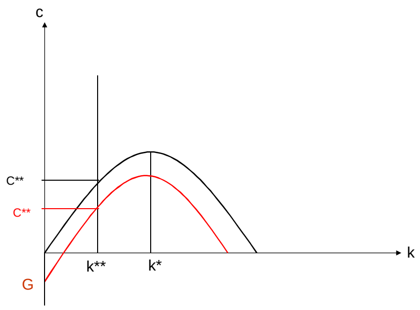
כמות ההון אינה משתנה ביחס למצב ללא ממשלה.

התוצר אינו משתנה ביחס למצב ללא ממשלה.

התצרוכת הפרטית יורדת ב – G.

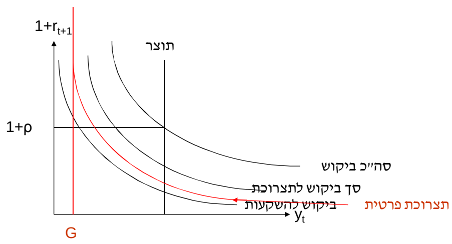
28

בציור



29

ניתוח גראפי



30

שינוי חד פעמי בהוצאות הממשלה

נניח שהוצאות הממשלה עולות רק בתקופה הנוכחית, ואח"כ חוזרות לרמתן הקודמת (הקבועה על פני זמן).

הביקוש להשקעות אינו משתנה.

בשער הריבית ρ הביקוש לתצרוכת יורד, אך בפחות מעליית התצרוכת הצבורית (מדוע?).

סה"כ הבקוש (בשער הריבית ρ) עולה.

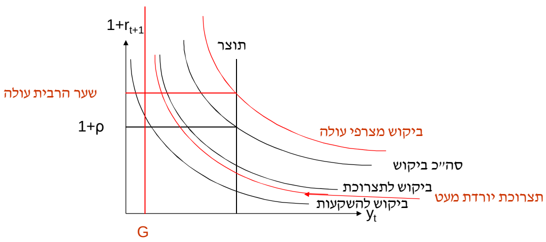
שער הריבית חייב לעלות!

ההשקעה יורדת והתוצר בתקופה **הבאה** *יורד* !

ההתכנסות למצב המנוחה המקורי תתמשך.

31

ניתוח גראפי



32

השפעה מתמשכת

ניקח מודל עם פונקצית תועלת לוגריתמית, 1/(1+ρ)=0.95, ופונקצית יצור מסוג קוב-דאגלס (α=0.3). שיעור הפחת הוא 100%.

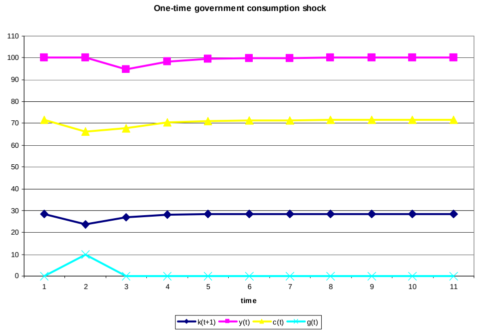
נניח שהמשק במנוחה, ללא ממשלה. (שיעור החיסכון הוא βα).

בתקופה מסויימת הממשלה צורכת 10% מהתוצר, ואח״כ התצרוכת הצבורית חוזרת להיות אפס.

הממשלה מטילה מס של 10% על כל מרכיבי ההכנסה. (שיעור החיסכון הוא (1-ד)βα/(1-דβα).

33

מסלול דינאמי



34

מס מעוות

נחזור עתה לשיווי המשקל במצב מנוחה ונניח (למען הפשטות) שהממשלה מטילה מס בשיעור τ על **כל** מקורות רווחי ההון (וצורכת את תקבולי המס). בהתאם יש לתקן את מגבלת התקציב של הפרטים:

$$c_t + p_t s_{t+1} + b_{t+1} =$$
$$w_t + [p_t - \tau(p_t - p_{t-1}) + (1-\tau)d_t]s_t + (1+(1-\tau)r_t)b_t$$

35

מס מעוות – תס״ר

תנאי הסדר הראשון הדינאמיים דורשים תיקונים בהתאם.

א. ביחס לאג״ח:

$$-u'(c_t) + (1+(1-\tau)r_{t+1})\frac{u'(c_{t+1})}{1+\rho} = 0$$

ב. ביחס למניות:

$$-p_t u'(c_t) + [(1-\tau)(p_{t+1}+d_{t+1}) + \tau p_t]\frac{u'(c_{t+1})}{1+\rho} = 0$$

36

מס מעוות - המשך

במצב מנוחה מקבלים :

$$(1 + (1-\tau)r) = (1 + \rho)$$

כלומר, $r^\tau = \rho/(1-\tau)$

מכאן ששער הרבית במשק עולה, והתוצר קטן, שכן היצרנים ממשיכים להשוות :

$$f'(k^\tau) = r^\tau + \delta$$

37

מחיר המניות

העדר הזדמנויות ארביטראז :

$$\frac{(1-\tau)(p_{t+1}+d_{t+1})+\tau p_t}{p_t} = 1+(1-\tau)r_{t+1}$$

במצב מנוחה :

$$(1-\tau)\frac{d^\tau}{p^\tau} = (1-\tau)r^\tau$$

הדיוידנד נתון ע״י : $d^\tau = r^\tau k^\tau$ (הוכח!), לכן :

$$p^\tau = k^\tau$$

38

הממשלה

במצב מנוחה, המקור היחיד לתקבולי מס הם הדיוידנדים (מדוע?). לכן :

$$G(k,\tau) = \tau d = \tau r k = \tau(f'(k)-\delta)k$$

בהתאם :

$$c(k,\tau) = f(k) - \delta k - \tau r k$$
$$= f(k) - \left[\delta + \tau\frac{\rho}{1-\tau}\right]k$$

39

הממשלה - המשך

מכאן מתקבל :

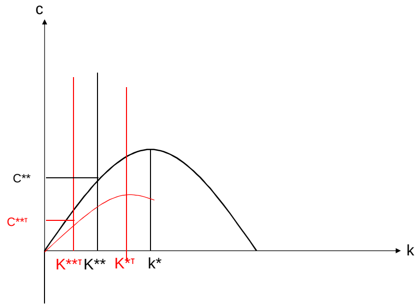
$$r_\tau^{**} > r^{**}$$

$$r_\tau^{*} > r^{*}$$

בנוסף ברור שבכל k התצרוכת נמוכה יותר כאשר τ חיובי.

40

בציור



41